

TD 24 : Factorisation de polynômes et fractions rationnelles

Indications

Polynômes irréductibles

- 1** ★ On pose
- $$A = 2X^4 - 3X^3 - 17X^2 + 27X - 9$$
- $$B = 2X^4 - X^3 - 19X^2 + 9X + 9$$
- 1) Calculer $A \wedge B$ et déterminer sa décomposition en produit de polynômes irréductibles.
 - 2) En déduire les décompositions de A et de B .
 - 3) En déduire $A \vee B$.

- 2** ★★ Factoriser les polynômes suivants, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$:

- $P_1 = X^4 - 1$
- $P_2 = X^2 + X + 1$
- $P_3 = X^3 - 2$
- $P_4 = X^4 + X^2 + 1$
- $P_5 = X^6 + 1$
- $P_6 = X^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$

- 3** ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le PGCD de $A = X^n - 1$ et de $B = (X - 1)^n$.

Factoriser les polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ pour identifier leur PGCD.

- 4** ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Calculer $(X - 1)P(X)$. En déduire une décomposition de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$.

Factoriser $(X - 1)P(X)$ pour en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.

- 5** ★★★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$, scindé à racines simples. Montrer que P' est scindé à racines simples.

Utiliser le théorème de Rolle.

- 6** ★★★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geq 0$
- $\exists A, B \in \mathbb{R}[X] \quad P = A^2 + B^2$

On pourra remarquer que $A^2 + B^2 = (A + iB)(A - iB)$.

Relations coefficients racines

- 7** ★★ Soit $P = 8X^3 - 4X^2 - 2X + 1$. Trouver les racines de P sachant que la somme de deux de ses racines fait 1.

Utiliser les relations coefficients racines ! Appeler α et β les racines de P qui vérifient $\alpha + \beta = 1$.

- 8** ★★ Déterminer les solutions des systèmes suivants (les inconnues sont prises dans $\mathbb{C}$) :

$$1) \begin{cases} a + b = i \\ ab = -2 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} a + b + c = -2 \\ ab + bc + ca = -1 \\ abc = 2 \end{cases}$$

Pour le second système, on pourra développer le polynôme $P = (X - a)(X - b)(X - c)$.

Fractions rationnelles : DES et généralités

- 9** ★★ Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

Utiliser le degré, sans inventer de théorème !

- 10** ★★ Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$:

$$\begin{aligned} \bullet F_1 &= \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} & \bullet F_5 &= \frac{4}{(X^2 + 1)^2} \\ \bullet F_2 &= \frac{2X}{X^4 - X^2} & \bullet F_6 &= \frac{1}{X^3 + 1} \\ \bullet F_3 &= \frac{1}{X^2(X - 1)^2} & \bullet F_7 &= \frac{1}{X^4 + X^2 + 1} \\ \bullet F_4 &= \frac{1}{X^2 + X + 1} & \bullet F_8 &= \frac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1} \end{aligned}$$

- 11** ★★★ Soit un entier $n \geq 1$. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

Lorsque α est un pôle simple de $\frac{R}{B}$, alors le coefficient au numérateur de $\frac{R}{X - \alpha}$ est $\frac{R(\alpha)}{B'(\alpha)}$.

12 ★

- 1) Déterminer la décomposition en éléments simples de $F = \frac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
- 2) En déduire pour tout entier $n \geq 1$ la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

2 Utiliser un télescope.

13 ★★

Soit $F = \frac{1}{(X+1)^3(X-1)^3}$.

- 1) Étudier la parité de F puis obtenir sa décomposition en éléments simples.
- 2) En déduire des polynômes U et V tels que $(X-1)^3U + (X+1)^3V = 1$.

2 Partir de la DES et faire disparaître toutes les fractions (pour obtenir uniquement une relation qui fait intervenir des polynômes)

14 ★★

Calculer $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2 \tan^2 x} dx$. On pourra utiliser le changement de variables $t = \sin x$.

Après le changement de variable, utiliser la DES.

15 ★★

Calculer pour tout entier $n \geq 1$ la dérivée n -ième de $f : x \mapsto \frac{x+2}{(x+1)^2(x-2)^2}$.

16 ★★★

- 1) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \frac{X}{X^4 + X^2 + 1}$.
- 2) En déduire pour tout entier $n \geq 1$ la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$.

2 Utiliser un télescope.